第５講　波動Ⅰ

1

次の文を読んで，［　　］には適した式を，また，｛　　｝には適切なものの番号を一つ選んで，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，［［　　］］はすでに［　　］で与えられたものと同じとする。

晴れた寒い夜や，上空に強い風が吹いているとき，地上の音源から遠く離れた場所でその音が大きく聞こえることがある。この現象を理解するために，大気の状態を図１のように簡単化して考察してみる。すなわち，水平な２つの境界面(境界面Ⅰおよび境界面Ⅱ)を境にして大気が３つの層から成っており，地表から境界面Ⅰまでの層では音速が v_1 で無風状態，境界面Ⅰから境界面Ⅱまでの層では音速が v_2 で無風状態，さらに境界面Ⅱ以上の層では(無風時の)音速が v_3 であって，風速 w の風が左から右に向かって水平方向に吹いているとする。この状況において，地上の音源Ｘより，鉛直から右へ角度 θ_1 をなす方向に発せられた音波の，各境界面での屈折・反射を考えよう。境界面Ⅰでの音波の屈折角を θ_2，境界面Ⅱでの屈折角を θ_3，反射角を θ_4 とする。

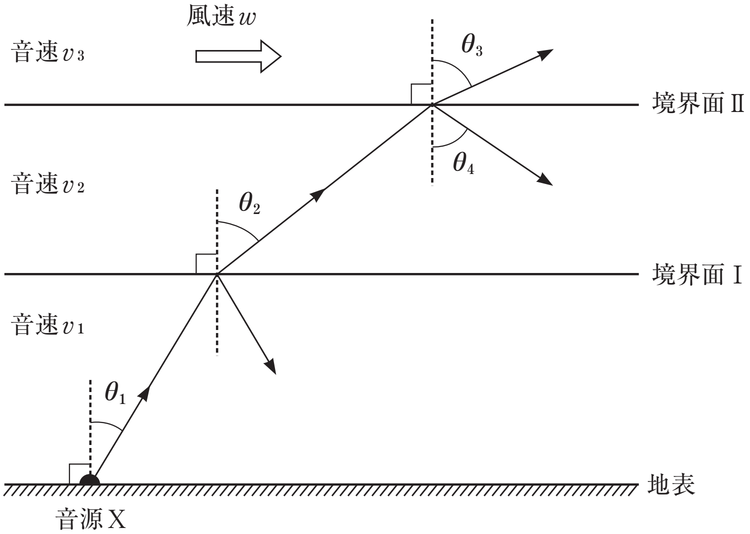


図１

境界面Ⅰは地表から十分離れており，そこに届いた音波は平面波と見なせる。このとき，境界面Ⅰにおける入射角と屈折角の関係を与える式として，$\frac{v_1}{v_2}$ を θ_1，θ_2 を用いて表す関係式

$$\frac{v_1}{v_2} = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ。次に，境界面Ⅱにおける入射角と屈折角の間の関係式をホイヘンスの原理にもとづいて考えよう。図２において，速さ v_2 で進む入射波の波面PQが境界面Ⅱに達すると，Pから素元波が発せられ球面状に広がっていく。Pが境界面Ⅱに達してから時間 t の後，Qが境界面上のSに達したとする。このとき，Pから発せられた素元波のなす半円の中心は

< Note >

水平右方向の風のために点P′まで移動している。Sからこの半円に対して引いた接線RSが屈折波の波面である。距離$\overline{PP'}$，$\overline{P'R}$，$\overline{QS}$をv_2，v_3，w，tを用いて表すと，

$\overline{PP'}$＝［ イ ］　　$\overline{P'R}$＝［ ウ ］　　$\overline{QS}$＝［ エ ］

である。したがって，境界面Ⅱでの入射角と屈折角の関係を与える式として，wをθ_2，θ_3，v_2，v_3を用いて表す関係式

w＝［ オ ］　…………………………………………………………………(1)

が成り立つ。この境界面Ⅱを透過した屈折波の波面は，鉛直からの角度θ_3方向に，v_3，w，θ_3で表される速さ［ カ ］で進んでいく。また，境界面Ⅱにおける入射角θ_2と反射角θ_4の関係を与える式として［ キ ］が成り立つ。

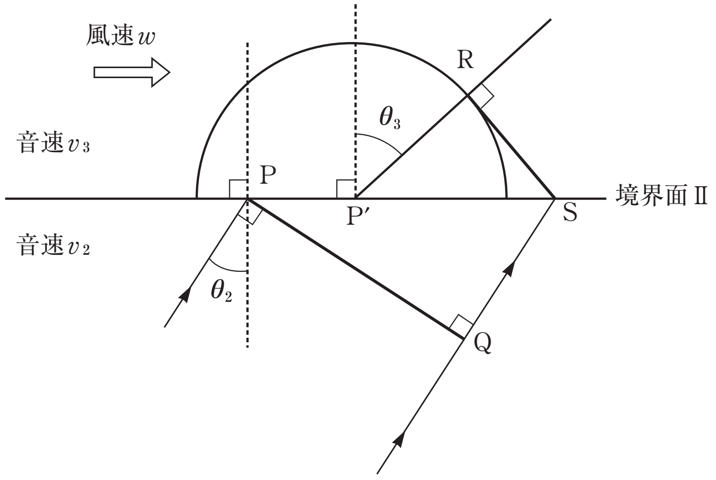


図２

さて，音源から遠く離れた地点でその音が大きく聞こえるという現象は，今の場合音源Xから発せられた音波が境界面で全反射されて地上に返ってくる現象であると考えられる。まず，境界面Ⅰにおける全反射を考えよう。この全反射が起きるような角度θ_1が存在するためには，v_1，v_2に関しての条件

［ ク ］＜1

が成り立つ必要がある。つまり，境界面ⅠとⅡの間の層の気温が境界面Ⅰ以下の層の気温に比べて｛ケ：①高く，②低く｝なければならない。この条件が成り立っている場合，$\sin\theta_A$＝［ ク ］で与えられる角度θ_Aよりも大きいθ_1に対して境界面Ⅰでの全反射が起きる。

次に，境界面Ⅱでの全反射を考えよう。ここでの全反射が起きるためには，関係式(1)より，風速wと音速v_2，v_3に関する条件

［ コ ］＜1　…………………………………………………………………(2)

が成り立たなければならない。このとき，境界面Ⅱに対する入射角θ_2が，

$\sin\theta_B$＝［ コ ］

で与えられる角度θ_Bよりも大きければ，境界面Ⅱでの全反射が起きる。θ_2がちょうどこの角度θ_Bに等しくなるような音波が音源Xを発する角度θ_1をθ_Cとする。このとき，$\sin\theta_C$は

＜ Note ＞

w，v_1，v_3 を用いて

$\sin\theta_C =$ **サ**

と与えられる。したがって，音源Xを発した音波が境界面Ⅱで全反射するためには，さらに

サ < 1 ……(3)

の条件も成り立っていなければならない。条件(2)と(3)が成り立っている場合，θ_C よりも｛**シ**：①大きい，②小さい｝角度 θ_1 で音源Xを発し境界面Ⅰを透過した音波は，境界面Ⅱで全反射する。

< Note >

2

次の文を読んで，文中の［　　　］に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。［［　　　］］はすでに［　　　］で与えられたものと同じものを表す。なお，微小量 $x(|x|\ll 1)$ および実数 a に対して成り立つ近似式 $(1+x)^a \fallingdotseq 1+ax$ を用いよ。

音波と電波の両方を同時に用いると，以下のようにしていろいろな高度での音速を測定することができ，測定された音速から大気の温度の高度分布を知ることができる。ここで音速を v_s で表し，電波の速さを真空中の光速 $c(=3.00\times10^8\,\mathrm{m/s})$ と等しいとする。音速 v_s は光速 c より十分小さいので $\dfrac{v_s}{c}$ は微小量であることに留意せよ。

大気は通常では電波を反射しない。しかし，図１に示すように音波を発射して大気の密度の増減を引き起こすと，電波を反射する面が音波の波長に等しい間隔でいく重にもあらわれ，地上から発した電波の一部は，これらの面で反射して再び地上に戻ってくる。この反射面の間隔は音波の振動数を f_s とすると［　ア　］である。

図１に示すように，地上から垂直に上空に向け，振動数 f_s の音波を短時間発した。音波を発して時間 t_1 後に，音波と同じ方向に，やはり短い時間だけ電波を発射したところ，電波を発して時間 t_2 後に地上に戻ってきた電波が観測された。このことから反射が生じた高度は $h=$［　イ　］であることがわかる。

電波に対しても音波など一般の波と同じようにドップラー効果を考えることができ，観測者および波源の動く速さが光速より十分に小さいときには，ドップラー効果の関係式は音波の場合と同じになる。よって，音速 v_s で上昇する仮想的な観測者には電波の振動数は発射した電波の振動数 f からずれてみえ，$f-\Delta f_1$ と表される。ここで，振動数のずれ Δf_1 は［　ウ　］となる。したがって，反射してきた電波を地上で測定すると，その振動数は $f-\Delta f_2$ と表すことができる。ここで，振動数のずれ Δf_2 は［　エ　］となり，これより高度 h における音速を知ることができる。

このような観測では地上に戻る電波が強いことが望ましい。そこで発射する電波の振動数 f を変えて繰り返し発射し，反射してくる電波の強度を観測した。その結果，電波の強度は振動数 f とともに大きく変化し，$f=f_0$ のとき最大になった。その理由を考えてみよう。電波の速さは音速 v_s で上昇する観測者に対しても光速 c に等しいので，振動数 f で発射した電波に対して，この観測者が見る波長は $\lambda=$［　オ　］となる。したがって，異なった反射面で反射される波が互いに強めあう条件は，自然数 n を用いて $\lambda=$［　カ　］となる。この関係式において $n=1$ とおくと，音速は電波の振動数 f_0 を用いて $v_s=$［　キ　］と表すことができる。ただし，$\dfrac{f_s}{f_0}$ は微小量なので，$\left(\dfrac{f_s}{f_0}\right)^2$ を含む項は無視せよ。

音速は高度とともに変化する大気圧には直接依存せず，大気を構成している分子の速さの平均（二乗平均速度）で近似的に与えられることがわかっているので，音速は絶対温度 T の［　ク　］乗に比例することになる。したがって，いろいろな高度で音速を測定すれば，それぞれの高度における大気の温度を知ることができる。例えば，ある観測の結果，$\dfrac{\Delta f_2}{f}=2.00\times10^{-6}$ であったとすると，Δf_2 が［［　エ　］］で与えられることを用いて，電波が反射された

< Note >

高度での音速は［　ケ　］m/s，温度は［　コ　］℃となる。それぞれ有効数字３桁および２桁で答えよ。ここで，音速は －3℃において 330m/s であるとして計算せよ。

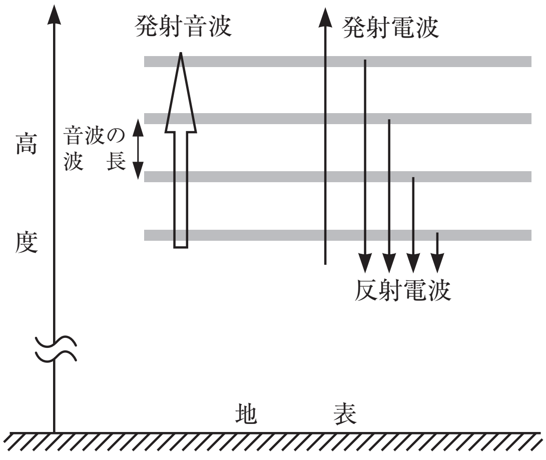


図１

< Note >

第５講　確認テスト

次の文を読んで，[　　　]には適した式を，{　　　}からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，問１～問３では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

(1)　ホイヘンスの原理を用いると波の多くの現象が理解できる。図１に示すように，媒質１$(Y<0)$を速さ v_1 で進んだ波は，媒質２$(Y>0)$を速さ v_2 で進み屈折を起こす。角度 θ_1 で入射した線分 AB を含む波面上の点 A は時刻 t_0 に境界に到達した。その後時刻 t_S に，点 B は境界上の点 S に達し，点 A は点 C に到達する。この間$(t_0<t<t_S)$の時刻 t に境界に達する点 P と点 S の間の距離は，時刻 t を用いると $\overline{PS}(t)=$ [　あ　] である。また時刻 t に境界上の点 P から放射され，時刻 t_S に点 Q で波面 CS に接する素元波の半径は，時刻 t を用いると $\overline{PQ}(t)=$ [　い　] である。以上から，媒質２の屈折角 θ_2 は，v_1，v_2 を用いると $\sin\theta_2=$ [　う　] となる。

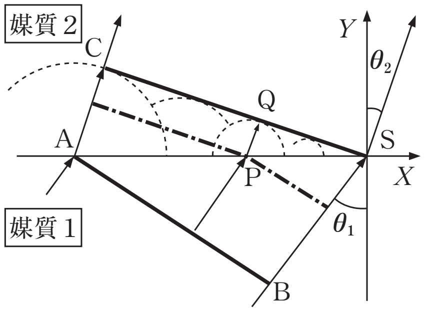


図１

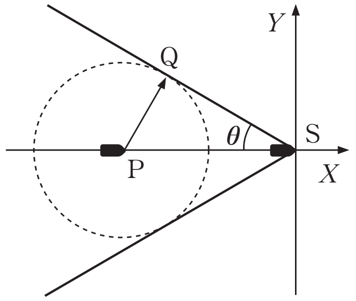


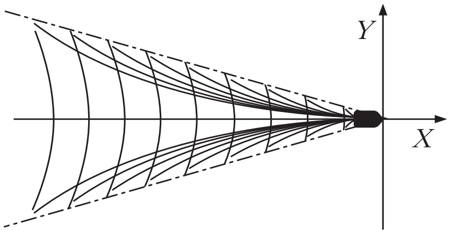
図２

(2)　浅い海の上を進む船は，くさび型の波面を伴う場合がある。(1)の結果を利用して，このくさび型の波面ができる条件を考えよう。船は大きさを持たず，図２に示すように，静止した水の上を一定の速さ V で X 軸上を進んで波を発生させたとする。時刻 t での船の位置を点 P とする。また，波の速さは c とする。船は，各時刻に変位が同じ(位相が同じ)である波長 λ の素元波を放射しながら進むとする。すなわち，図２の点 P から放射される素元波を，図１の点 P から放射される素元波と同様に扱うこととする。時刻 t_S に船が原点 S に到達した。このとき，図２のように，船は後方に原点を通るくさび型の波面を伴っていた。

問１　波面と X 軸がなす角度 θ に対して $\sin\theta$ を求めよ。くさび型の波面ができるときに，船の速さ V と波の速さ c が満たす条件式を導け。

< Note >

深い海の上を進む船の後ろにできる美しい波模様は，参考図のようにくさび型領域に限られる。このくさび型の領域は，問１の結果とは違って，船の速さにはよらない一定の角度を持つ。この違いは，波長より水深が深い場合には波長が短いほど水の波の速さが遅いという性質があることと，船が作る波は波長の異なる多くの波が重ね合わさっていることが原因である。この違いについて考えよう。



１点鎖線：くさび型領域の境界

参考図

(3)　はじめに，平面波の性質を調べよう。x 軸の正の方向に進む平面波の波長を λ，振動数を f とする。このとき，時刻 t，位置 x での波の変位 h は，三角関数を使って $h=a\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x-2\pi ft\right)$ と書ける。ここで，a は平面波の振幅である。ただし，時刻 $t=0$，位置 $x=0$ での波の変位を 0 とおいた。この式に現れる $\dfrac{2\pi}{\lambda}$ は「波数」と呼ばれており，これを k とおく。また，角振動数 $\omega=2\pi f$ を用いると，次のように表現が簡単になる。

$$h=a\sin(kx-\omega t) \qquad \text{(i)}$$

座標 x と時刻 t を固定したときの $kx-\omega t$ の値をその位置 x と時刻 t での波の位相と呼ぶ。位相が一定の値 (θ_0) である位置 x は，$kx-\omega t=\theta_0$ の関係を満たしながら，x 軸の正の方向に一定の速度 c で進む。この速度は平面波の「位相速度」と呼ばれている。波数 k と角振動数 ω を用いて表すと $c=$ **［　え　］** となる。

問２　図３には，式(i)で表される波の時刻 $t=0$ での変位 h が描かれている。図３を参考にして，時刻 $t=\dfrac{1}{4f}$ におけるこの波の変位 h の概略図を，$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\lambda$ の範囲で解答用紙の所定欄に書き入れよ。ただし，縦軸と横軸の数値と記号は図３と同じように記入せよ。

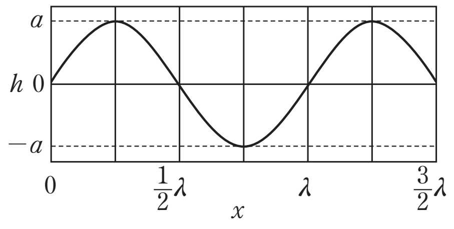


図３

< Note >

(4) 次に，波数 k と角振動数 ω がわずかに異なる２つの平面波，波１と波２の重ね合わせを考えよう。波１と波２の波数を $k_1=k+\Delta k$, $k_2=k-\Delta k$，角振動数を $\omega_1=\omega+\Delta\omega$, $\omega_2=\omega-\Delta\omega$ とする。また，波１と波２の振幅は等しく，a とする。ただし，Δk, $\Delta\omega$ は，それぞれ波数 k，角振動数 ω に比べその大きさが十分小さい定数であり，$\Delta k>0$ とする。このとき，波１の変位を $h_1=a\sin(k_1x-\omega_1t)$，波２の変位を $h_2=a\sin(k_2x-\omega_2t)$ と表すと，重ね合わせた波の変位 $h=h_1+h_2$ は，公式 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\cos B\sin A$ を用いて，以下のように書ける。

$$h=h_1+h_2=2a\cos(\boxed{\text{お}})\sin(kx-\omega t)$$

重ね合わせた波の変位 h は，平面波の部分 $\sin(kx-\omega t)$ と，その振幅の変動を表す部分 $2a\cos(\boxed{\text{お}})$ の積になっている。この振幅の変動に着目して式(i)と比べると，この振幅の変動が速度 $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$ で伝わることがわかる。この振幅の変動が伝わる速度を「群速度」と呼び v_G とおく。

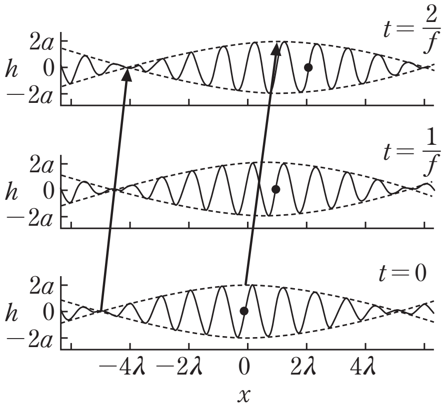


図４

図４には，重ね合わせた波の変位の時間変化の一例を描いた。ここで，振幅の変動を破線で表し，その腹と節の伝搬を矢印で，また $t=0$, $x=0$ における平面波の部分の位相と同じ位相を持つ点の位置を黒丸で，それぞれ示した。図４は，平面波の部分は位相速度 c で伝わり，その振幅の規則的な強弱は群速度 v_G で伝わることを表している。

群速度は波の形やその発展を決めるために重要であると共に，波のかたまりや波のエネルギーの伝搬を理解する上でも重要な物理量である。

波１と波２の位相速度が等しい場合，位相速度 c と群速度 v_G の関係は $\left\{\text{か}：① \ c>v_G \quad ② \ c=v_G \quad ③ \ c<v_G\right\}$ である。このとき，$x=0$ の点で観測される波の変位 h の時間変化を，図５に示す。音のうなりと同じように変位 h の振動の強弱が規則的に観測される。単位時間当たりのうなりの数は角振動数を用いると $\boxed{\text{き}}$ である。

＜ Note ＞

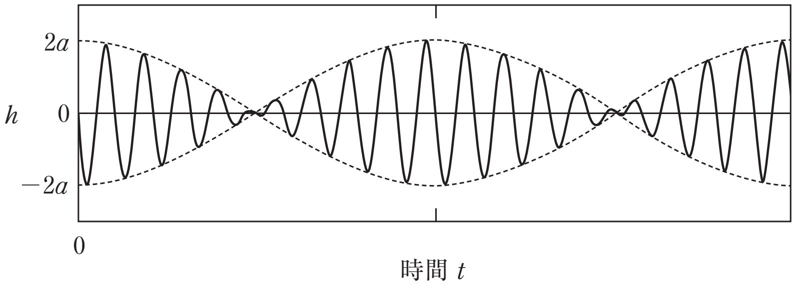


図５

問３　船の作る波の波長に比べ水深が十分深い場合，角振動数 ω と波数 k の間には，$\omega=\sqrt{gk}$ の関係が成り立つ。ここで，g は重力加速度の大きさである。このとき，群速度 v_G と位相速度 c をそれぞれ計算し，比 $\dfrac{v_G}{c}$ を求めよ。必要ならば，$\omega(k)=\alpha\sqrt{k}$ に対する次の近似式を用いよ。

$$\omega(k)\pm\Delta\omega=\omega(k\pm\Delta k)\fallingdotseq\omega(k)\pm\frac{\alpha\Delta k}{2\sqrt{k}}$$

深い海の上を進む船は多くの波長の波を作るので，重ね合わせの結果，振幅の大きな変動は群速度で伝わる。問３で求めた群速度と位相速度の関係から，波の伝わる範囲が狭まることが予想できる。さらに，波長の異なる多数の波の効果を考慮すると参考図のような波の模様が作られることを示すことができる。この船の作る波は，ケルビン波と呼ばれる。

< Note >

第５講　解答

1

ア $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$　イ wt　ウ v_3t　エ v_2t　オ $\dfrac{v_2}{\sin\theta_2}-\dfrac{v_3}{\sin\theta_3}$

カ $v_3+w\sin\theta_3$　キ $\theta_2=\theta_4$　ク $\dfrac{v_1}{v_2}$　ケ ①　コ $\dfrac{v_2}{v_3+w}$

サ $\dfrac{v_1}{v_3+w}$　シ ①

2

ア $\dfrac{v_s}{f_s}$　イ $\dfrac{1}{2}ct_2$　ウ $\dfrac{v_s}{c}f$　エ $\dfrac{2v_s}{c}f$　オ $\left(1+\dfrac{v_s}{c}\right)\dfrac{c}{f}$

カ $\dfrac{2v_s}{nf_s}$　キ $\dfrac{f_s}{2f_0}c$　ク $\dfrac{1}{2}$　ケ 3.00×10^2　コ -5.0×10

第５講　確認テスト

【解答】

あ　$\dfrac{v_1(t_S-t)}{\sin\theta_1}$　い　$v_2(t_2-t)$　う　$\dfrac{v_2}{v_1}\sin\theta_1$　え　$\dfrac{\omega}{k}$　お　$\Delta k\cdot x-\Delta\omega\cdot t$

か　②　き　$\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}$

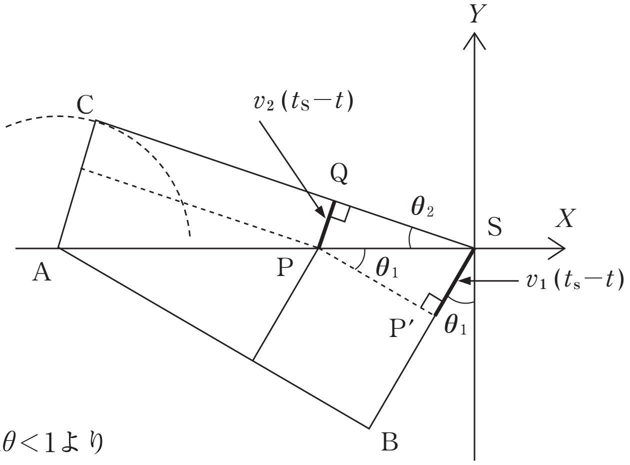
問１　$\sin\theta=\dfrac{c}{V}$　条件式：$V>c$

問２　解説の図を参照のこと

問３　$\dfrac{1}{2}$

【解説】

(1)



あ　$\overline{\mathrm{PS}}(t)=\dfrac{\overline{\mathrm{P'S}}}{\sin\theta_1}=\dfrac{v_1(t_S-t)}{\sin\theta_1}$

い　$\overline{\mathrm{PQ}}(t)=v_2(t_2-t)$

う　△PQSに注目。

$\sin\theta_2=\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}(t)}{\overline{\mathrm{PS}}(t)}=\dfrac{v_2}{v_1}\sin\theta_1$

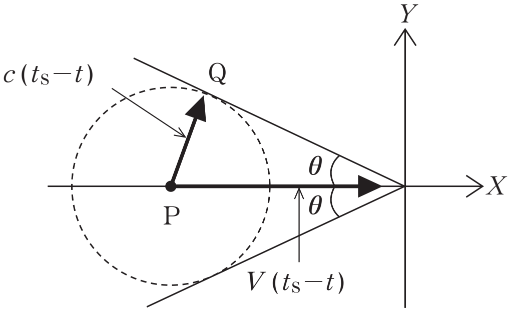
(2)

問１　$\sin\theta=\dfrac{c(t_S-t)}{V(t_S-t)}=\dfrac{c}{V}$

この様な θ が存在するためには, $\sin\theta<1$ より

$\dfrac{c}{V}<1$　$\therefore$　$V>c$

が必要。



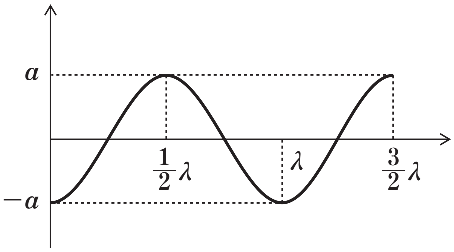
(3)

え　x, t が異なっても位相が等しいので

$kx-\omega t=k(x+\Delta x)-\omega(t+\Delta t)$

$\therefore$　$c=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\omega}{k}$

問２　$\dfrac{1}{4}$周期後は$\dfrac{1}{4}$波長だけ進む。



(4)

お　まず，h_1，h_2 を整理。

$$h_1 = a\sin(k_1x - \omega_1 t)$$
$$= a\sin\{(k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t\}$$
$$= a\sin\{\underbrace{(kx-\omega t)}_{A} + \underbrace{(\Delta k\cdot x - \Delta\omega\cdot t)}_{B}\}$$

同様に，

$$h_2 = a\sin\{\underbrace{(kx-\omega t)}_{A} - \underbrace{(\Delta k\cdot x - \Delta\omega\cdot t)}_{B}\}$$

となるので，与えられた三角関数の公式より，

$$h_1 + h_2 = a\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} = 2a\cos(\Delta k\cdot x - \Delta\omega\cdot t)\cdot\sin(kx - \omega t)$$

か　波１と波２の位相速度がともに c のとき，

$$c = \frac{\omega+\Delta\omega}{k+\Delta k} \qquad \therefore \quad \omega+\Delta\omega = c(k+\Delta k)$$
$$c = \frac{\omega-\Delta\omega}{k-\Delta k} \qquad \therefore \quad \omega-\Delta\omega = c(k-\Delta k)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{位相速度}:\dfrac{\omega}{k} \\ \text{群速度}:\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} \end{array}\right)$$

辺々ひくと，

$$2\Delta\omega = 2c\cdot\Delta k \qquad \therefore \quad v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = c \text{ となる。}$$

き　お の，$h_1 + h_2$ の式で $x=0$ として，

$$h = 2a\cos(-\Delta\omega\cdot t)\cdot\sin(-\omega t)$$

$$\left(\begin{array}{rr} & \omega_1 = \omega+\Delta\omega \\ -) & \omega_2 = \omega-\Delta\omega \\ \hline & \omega_1 - \omega_2 = 2\Delta\omega \end{array}\right)$$

よって，強弱は $\Delta\omega$ で決まり，うなりの数は，

$$n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$$

問３　$\omega = \sqrt{gk}$ のとき，

$$\begin{cases} \text{位相速度}:c = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{g}{k}} \\ \text{群速度}\quad:v_G = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} \fallingdotseq \dfrac{\dfrac{\sqrt{g}\cdot\Delta k}{2\sqrt{k}}}{\Delta k} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}} \end{cases}$$

ゆえ，比をとると，

$$\frac{v_G}{c} = \frac{1}{2}$$